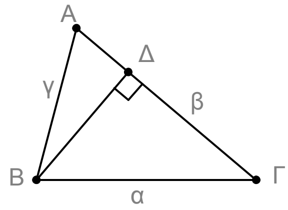
9.4 – 9.6
Γενίκευση του Πυθαγόρειου και Θεωρήματα Διαμέσων

ΘΕΩΡΙΑ

1.

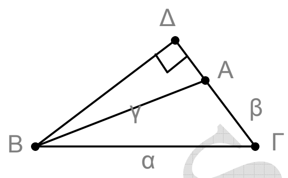
Θεώρημα οξείας γωνίας

$\widehat{A} < 90^o \iff \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$



Θεώρημα αμβλείας γωνίας

$\widehat{A} > 90^o \iff \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$



Πυθαγόρειο

$\widehat{A} = 90^o \iff \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

2.

Πορίσματα

$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \iff \widehat{A} > 90^o$

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \iff \widehat{A} = 90^o$

$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \iff \widehat{A} < 90^o$

3.

Νόμος συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \text{συν}\widehat{A}$ και κυκλικά

4.

Το ύψος συναρτήσει των πλευρών

$\upsilon_\alpha = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ και κυκλικά

Το εμβαδόν συναρτήσει των πλευρών

$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

5.

1^o Θεώρημα Διαμέσων

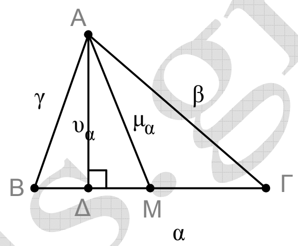
$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$ και κυκλικά

Η διάμεσος συναρτήσει των πλευρών

$\mu_\alpha^2 = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$ και κυκλικά

6.

2^o Θεώρημα Διαμέσων



$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta$

Η προβολή της διαμέσου συναρτήσει των πλευρών

$M\Delta = \dfrac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Σ' ένα τρίγωνο ισχύει $\beta = 2\alpha$ και $\gamma = \alpha\sqrt{7}$. Να υπολογίσετε την μεγαλύτερη γωνία του.

Προτεινόμενη λύση

$\gamma = \alpha\sqrt{7} > \alpha \Rightarrow \gamma > \alpha$

$\gamma = \alpha\sqrt{7} > 2\alpha = \beta \Rightarrow \gamma > \beta$

Οπότε μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η γ.

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 7\alpha^2 = \alpha^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha^2\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$

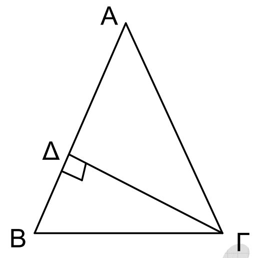
$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = -\dfrac{1}{2}$

$\hat{\Gamma} = 120^o$

2.

Σε οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ φέρνουμε το ύψος ΓΔ .
Δείξτε ότι $ΒΓ^2 = 2ΑΒ \cdot ΒΔ$

Προτεινόμενη λύση



$$\hat{A} < 90^o \quad \Rightarrow \quad ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΔ$$

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΒ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΔ$$

$$ΒΓ^2 = 2ΑΒ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΔ$$

$$ΒΓ^2 = 2ΑΒ\,(ΑΒ - ΑΔ)$$

$$ΒΓ^2 = 2ΑΒ \cdot ΒΔ$$

3.

Συναρτήσει των κ, λ, να υπολογίσετε τα ύψη ενός τριγώνου ΑΒΓ, όταν

$ΑΒ = ΑΓ = κ$ και $ΒΓ = λ$

Προτεινόμενη λύση

Είναι $\quad τ = \dfrac{ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ}{2} = \dfrac{2κ + λ}{2}$

$$υ_α = \frac{2}{α}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)} \quad \Rightarrow$$

$$υ_α = \frac{2}{λ}\sqrt{\frac{2κ+λ}{2}\cdot\left(\frac{2κ+λ}{2} - λ\right)\cdot\left(\frac{2κ+λ}{2} - κ\right)\cdot\left(\frac{2κ+λ}{2} - κ\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{4κ^2 - λ^2}$$

Ομοίως $\quad υ_β = υ_γ = \dfrac{λ}{2κ}\sqrt{4κ^2 - λ^2}$

4.

Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 2 , ΒΓ=1 + $\sqrt{3}$, ΑΓ = $\sqrt{6}$.

i) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

ii) Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{B}$

iii) Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου ΑΜ στην ΒΓ.

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή $1 + \sqrt{3} > \sqrt{6} > 2$, η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η ΒΓ.

$B\Gamma^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$ και

$AB^2 + A\Gamma^2 = 2 + 6 = 8$

Άρα $B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^o \Rightarrow$ το τρίγωνο είναι οξυγώνιο

ii)

Νόμος συνημιτόνων : $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB \cdot B\Gamma \cdot \text{συν}\hat{B}$

$$6 = 4 + 1 + 3 + 2\sqrt{3} - 2 \cdot 2 \cdot (1+\sqrt{3})\text{συν}\hat{B}$$

$$\text{συν}\hat{B} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{B} = 60^o$$

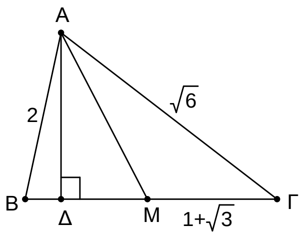
iii)

Έστω ΔΜ η προβολή της διαμέσου ΑΜ στην ΒΓ

2^o θεώρημα διαμέσων : $A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma\,\Delta M$

$$6 - 4 = 2(1+\sqrt{3})\,\Delta M$$

$$\Delta M = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

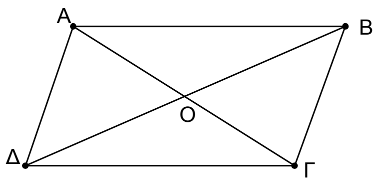


5.

Δείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του.

Προτεινόμενη λύση

1^o Θεώρημα Διαμέσων στο τρίγωνο ΑΔΒ :



$$AB^2 + A\Delta^2 = 2AO^2 + \frac{\Delta B^2}{2}$$
$$= 2\left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2 + \frac{\Delta B^2}{2}$$
$$= \frac{A\Gamma^2}{2} + \frac{\Delta B^2}{2} \quad \textbf{(1)}$$

Ομοίως στο τρίγωνο ΓΔΒ : $\Gamma\Delta^2 + \Gamma B^2 = \frac{A\Gamma^2}{2} + \frac{\Delta B^2}{2}$ **(2)**

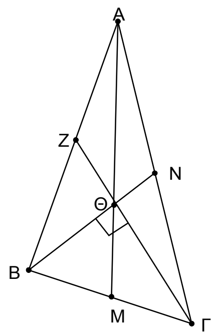
(1) + (2) : $AB^2 + A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 + \Gamma B^2 = \frac{A\Gamma^2}{2} + \frac{\Delta B^2}{2} + \frac{A\Gamma^2}{2} + \frac{\Delta B^2}{2}$
$= A\Gamma^2 + B\Delta^2$

6.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$. Δείξτε ότι $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \mu_\alpha^2$

Προτεινόμενη λύση

Έστω οι διάμεσοι ΑΜ , ΒΝ και ΓΖ έτσι ώστε $BN \perp \Gamma Z$, και Θ το κέντρο βάρους του τριγώνου.



Πυθαγόρειο το τρίγωνο ΒΘΓ : $B\Theta^2 + \Theta\Gamma^2 = B\Gamma^2$

$$\left(\frac{2}{3}\mu_\beta\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mu_\gamma\right)^2 = B\Gamma^2 \quad \textbf{(1)}$$

Όμως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΘΓ η ΘΜ είναι διάμεσος.

Άρα $\Theta M = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\mu_\alpha = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{2}{3}\mu_\alpha$

Η (1) γίνεται $\left(\frac{2}{3}\mu_\beta\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mu_\gamma\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\mu_\alpha\right)^2$

$$\frac{4}{9}\mu_\beta^2 + \frac{4}{9}\mu_\gamma^2 = \frac{4}{9}\mu_\alpha^2$$

$$\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \mu_\alpha^2$$

7.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ έτσι ώστε να ισχύει $2\mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \dfrac{\alpha^2}{2}$

i) Δείξτε ότι $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-\beta\gamma$

ii) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$2\mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\cdot\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4} - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 - 2\beta\gamma = \alpha^2$$

$$\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma = \alpha^2$$

ii)

Νόμος συνημιτόνων : $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-\beta\gamma.\text{συν}\widehat{A}$ και λόγω του (i)

$$\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma = \beta^2+\gamma^2-\beta\gamma.\text{συν}\widehat{A}$$

$$\text{συν}\widehat{A} = \frac{1}{2}$$

$$\widehat{A} = 60^o$$

8.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δείξτε ότι :

i) Αν $\mu_\alpha = \mu_\beta\sqrt{2}$ τότε $4\beta^2 = 5\alpha^2 + 2\gamma^2$

ii) Αν $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha\mu_\alpha$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

iii) Αν $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$ τότε **α)** $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2$

β) $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, $\mu_\gamma = \dfrac{\beta\sqrt{3}}{2}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\mu_\alpha = \mu_\beta\sqrt{2} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = 2\mu_\beta^2$$

$$\frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = 2\cdot\frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}$$

$$4\beta^2 = 5\alpha^2 + 2\gamma^2$$

ii)

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha\cdot\mu_\alpha \Leftrightarrow 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} = 2\alpha\mu_\alpha$$

$$4\mu_\alpha^2 - 4\alpha\mu_\alpha + \alpha^2 = 0$$

$$(2\mu_\alpha - \alpha)^2 = 0$$

$$2\mu_\alpha - \alpha = 0 \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$$

Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την α

iii)

α) $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 \Leftrightarrow \dfrac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \dfrac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} = 2\cdot\dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$ η οποία ισχύει από την υπόθεση

β) $\mu_\alpha^2 = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \dfrac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4}$ (λόγω της υπόθεσης)

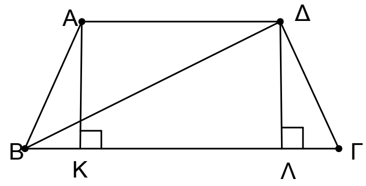
$$= \frac{4\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \Rightarrow \mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\mu_\gamma = \dfrac{\beta\sqrt{3}}{2}$

9.

Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ$\parallel$ΒΓ) δείξτε ότι $ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ \cdot ΒΓ$

Προτεινόμενη λύση



Έστω ότι $\hat{Γ} < 90^o$. Φέρω τα ύψη ΑΚ και ΔΛ.

Από γενίκευση πυθαγορείου στο τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε

$ΒΔ^2 = ΒΓ^2 + ΔΓ^2 - 2ΒΓ \cdot ΓΛ$ και επειδή $ΑΒ = ΔΓ$

$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ(ΒΓ - 2ΓΛ)$ **(1)**

Τρ.ΑΒΚ = τρ. ΔΛΓ $\Rightarrow$ ΒΚ = ΛΓ

Οπότε $ΒΓ - 2ΓΛ = ΒΓ - ΓΛ - ΒΚ$

$ΒΓ - 2ΓΛ = ΚΛ$

Και επειδή το ΑΚΛΔ είναι ορθογώνιο, θα είναι ΚΛ = ΑΔ

Η (1) γίνεται $ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ \cdot ΑΔ$

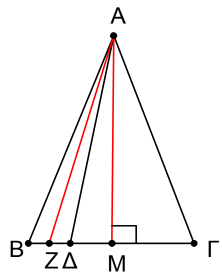
10.

Αν Δ σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ότι
$ΑΒ^2 - ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$.

Προτεινόμενη λύση

Φέρνουμε το ύψος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ και την διάμεσο ΑΖ του ΑΒΔ
2^o θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΔ :

$$ΑΒ^2 - ΑΔ^2 = 2ΒΔ\ ΖΜ \quad \textbf{(1)}$$



Όμως
$$\begin{aligned} 2ΖΜ &= 2(ΖΔ + ΔΜ) \\ &= 2ΖΔ + 2ΔΜ \\ &= ΒΔ + ΔΜ + ΔΜ \\ &= ΒΜ + ΔΜ \\ &= ΜΓ + ΔΜ = ΔΓ \end{aligned}$$

Οπότε η (1) γίνεται $ΑΒ^2 - ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$.

11.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = \gamma\sqrt{7}$ και $\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

i) Να δείξτε ότι $\alpha = 2\gamma$

ii) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του .

iii) Αν ΒΔ ύψος να βρείτε τον λόγο $\frac{ΑΔ}{ΑΓ}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$$

$$\frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4}$$

$$2\beta^2 + 2\gamma^2 = 4\alpha^2 \quad \mathbf{(1)}$$

Όμως $\beta = \gamma\sqrt{7} \Leftrightarrow \beta^2 = 7\gamma^2$

Οπότε η (1) γίνεται $14\gamma^2 + 2\gamma^2 = 4\alpha^2$

$$\alpha^2 = 4\gamma^2 \Leftrightarrow \alpha = 2\gamma$$

ii)

Επειδή $\gamma\sqrt{7} > 2\gamma > \gamma$, μεγαλύτερη πλευρά στο τρίγωνο είναι η β, με

$\beta^2 = 7\gamma^2$ και $\alpha^2 + \gamma^2 = 2\gamma^2 + \gamma^2 = 5\gamma^2$

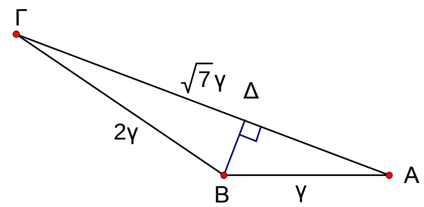
Άρα $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο με $\hat{B} > 90^o$

iii)

$\hat{A} < 90^o \Rightarrow ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓΑΔ$

$$4\gamma^2 = \gamma^2 + 7\gamma^2 - 2\sqrt{7}\gamma.\, ΑΔ$$

$$ΑΔ = \frac{2\gamma}{\sqrt{7}}$$

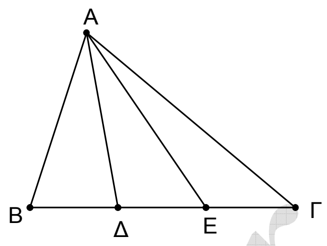


Οπότε $\frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{\frac{2\gamma}{\sqrt{7}}}{\gamma\sqrt{7}} = \frac{2}{7}$

12.

Στην πλευρά $ΒΓ$ τριγώνου $ΑΒΓ$ θεωρούμε τα σημεία $Δ$ και $Ε$, έτσι ώστε $ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ$. Δείξτε ότι $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - \frac{4}{9}ΒΓ^2$

Προτεινόμενη λύση



Στα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΑΔΓ$, οι $ΑΔ$ και $ΑΕ$ είναι διάμεσοι.

Άρα $ΑΔ^2 = \frac{2ΑΒ^2 + 2ΑΕ^2 - ΒΕ^2}{4}$

και $ΑΕ^2 = \frac{2ΑΔ^2 + 2ΑΓ^2 - ΔΓ^2}{4}$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε

$$ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = \frac{2ΑΒ^2 + 2ΑΕ^2 - ΒΕ^2}{4} + \frac{2ΑΔ^2 + 2ΑΓ^2 - ΔΓ^2}{4}$$

$$4ΑΔ^2 + 4ΑΕ^2 = 2ΑΒ^2 + 2ΑΕ^2 - ΒΕ^2 + 2ΑΔ^2 + 2ΑΓ^2 - ΔΓ^2$$

$$2ΑΔ^2 + 2ΑΕ^2 = 2ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 - ΒΕ^2 - ΔΓ^2$$

$$2ΑΔ^2 + 2ΑΕ^2 = 2ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 - \left(\frac{2}{3}ΒΓ\right)^2 - \left(\frac{2}{3}ΒΓ\right)^2$$

$$2ΑΔ^2 + 2ΑΕ^2 = 2ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 - \frac{8}{9}ΒΓ^2$$

$$ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - \frac{4}{9}ΒΓ^2$$

13.

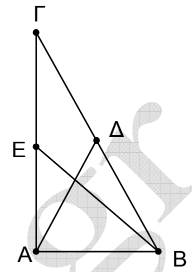
Αν BE διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$), δείξτε ότι

i) $BE^2 + \frac{3}{4}A\Gamma^2 = B\Gamma^2$

ii) Αν $BE = \sqrt{14}$ και $B\hat{\Delta}A = 60^o$, όπου Δ μέσο της ΒΓ , να υπολογίσετε τις πλευρές του ΑΒΓ.

Προτεινόμενη λύση

i)



$$BE^2 + \frac{3}{4}A\Gamma^2 = \frac{2B\Gamma^2 + 2AB^2 - A\Gamma^2}{4} + \frac{3}{4}A\Gamma^2$$

$$= \frac{2B\Gamma^2 + 2AB^2 + 2A\Gamma^2}{4}$$

$$= \frac{B\Gamma^2 + AB^2 + A\Gamma^2}{2}$$

$$= \frac{B\Gamma^2 + B\Gamma^2}{2} = B\Gamma^2$$

ii)

Επειδή ΑΔ διάμεσος στην υποτείνουσα, θα είναι $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = B\Delta$,

και δεδομένου ότι $B\hat{\Delta}A = 60^o$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο με $AB = B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$

Ακόμα $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + \frac{B\Gamma^2}{4} \Leftrightarrow A\Gamma = \frac{B\Gamma\sqrt{3}}{2}$

Από το (i) έχουμε : $BE^2 + \frac{3}{4}A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \Leftrightarrow$

$$14 + \frac{3}{4}\left(\frac{B\Gamma\sqrt{3}}{2}\right)^2 = B\Gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma = 4\sqrt{2}$$

Οπότε $AB = 2\sqrt{2}$ και $A\Gamma = 2\sqrt{6}$

14.

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$, δείξτε ότι

i) $\mu_\beta{}^2 + \mu_\gamma{}^2 = 2\mu_\alpha{}^2$

ii) $\dfrac{\mu_\alpha}{\alpha} = \dfrac{\mu_\beta}{\gamma} = \dfrac{\mu_\gamma}{\beta} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\mu_\beta{}^2 + \mu_\gamma{}^2 = 2\mu_\alpha{}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad \text{που ισχύει από υπόθεση}$$

ii)

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4} = \frac{2 \cdot 2\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_\alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} = \frac{3\gamma^2}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\mu_\beta = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu_\alpha}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $\dfrac{\mu_\gamma}{\beta} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(3)**

$$(1),\ (2),\ (3) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_\alpha}{\alpha} = \frac{\mu_\beta}{\gamma} = \frac{\mu_\gamma}{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

15.

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha^2 + \beta\gamma > \dfrac{\alpha^2}{4} > \mu_\alpha^2 - \beta\gamma$

Προτεινόμενη λύση

$$\mu_\alpha^2 + \beta\gamma > \frac{\alpha^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} + \beta\gamma > \frac{\alpha^2}{4}$$

$$2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 + 4\beta\gamma > \alpha^2$$

$$\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma > \alpha^2$$

$$(\beta + \gamma)^2 > \alpha^2$$

$$\beta + \gamma > \alpha \quad \text{που ισχύει από την τριγωνική ανισότητα.}$$

Ομοίως για την ανίσωση $\dfrac{\alpha^2}{4} > \mu_\alpha^2 - \beta\gamma$